Hoja 3 de ejercicios. Autómatas y computabilidad.
Facultad de Matemáticas. UCM

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indica si es cierta o no, justificando tu respuesta:

   a) Todo lenguaje regular es un subconjunto de un lenguaje regular.
   b) Todo lenguaje no regular es un subconjunto de un lenguaje regular.
   c) Todo lenguaje es un subconjunto de un lenguaje regular.
   d) Un lenguaje regular puede ser un subconjunto de un lenguaje no regular.
   e) Un lenguaje regular infinito puede ser un subconjunto de un lenguaje no regular.
   f) Todo lenguaje regular finito es un subconjunto de un lenguaje no regular.
   g) Todo lenguaje regular es un subconjunto de un lenguaje no regular.
   h) Un lenguaje no regular puede ser un subconjunto de otro lenguaje no regular distinto.
   i) La intersección de dos lenguajes regulares siempre es regular.
   j) La intersección de dos lenguajes no regulares nunca es regular.
   k) La intersección de un lenguaje regular y otro no regular puede ser regular.
   l) La intersección de un lenguaje regular y otro no regular puede ser no regular.
   m) La unión de dos lenguajes regulares siempre es regular.
   n) La unión de dos lenguajes no regulares nunca es regular.
   ñ) La unión de un lenguaje regular y otro no regular puede ser regular.
   o) La unión de un lenguaje regular y otro no regular puede ser no regular.
   p) La concatenación de dos lenguajes regulares siempre es regular.
   q) La concatenación de un lenguaje regular y otro no regular puede ser regular.
   r) La concatenación de un lenguaje no regular y otro regular puede ser regular.
   s) Siendo L_1 y L_2 lenguajes no regulares distintos, $L_2 \backslash L_1$ puede ser un lenguaje regular.
   t) El complementario de un lenguaje no regular puede ser regular.
   u) El complementario de un lenguaje no regular puede ser no regular.
   v) El complementario de un lenguaje regular puede ser no regular.

2. Minimiza el autómata finito determinista representado por la siguiente tabla de transiciones, donde los estados de aceptación son q_1, q_7 y q_9, y el estado inicial es q_0.

	a	b
q_0	q_1	q_6
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_2
q_3	q_5	q_3
q_4	q_4	q_8
q_5	q_5	q_4
q_6	q_6	q_7
q_7	q_0	q_7
q_8	q_8	q_9
q_9	q_0	q_9

3. Averigua si el autómata finito determinista representado por la siguiente tabla de transiciones es mínimo, es decir, si no existe ningún autómata finito determinista con menos estados que represente el mismo lenguaje. El estado inicial es q_1, y el único estado de aceptación es q_9.

	0	1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_5	q_4
q_3	q_6	q_6
q_4	q_7	q_7
q_5	q_8	q_7
q_6	q_8	q_8
q_7	q_1	q_1
q_8	q_9	q_9
q_9	q_3	q_2

4. Averigua si los dos autómatas finitos deterministas representados por las siguientes tablas son equivalentes, es decir, si reconocen exactamente los mismos lenguajes. En ambos autómatas el estado inicial es q_1. En el autómata representado a la izquierda, los estados de aceptación son q_1 y q_3. Por su parte, en el autómata representado a la derecha, el único estado de aceptación es q_1.

	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_3
q_4	q_4	q_1

	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_2	q_1

5. Para cada uno de los lenguajes siguientes, indica si son regulares o no. Si lo son, proporciona su expresión regular, y si no lo son demuéstralo bien utilizando el lema del bombeo o bien encontrando un conjunto infinito de cadenas distinguibles:

- $L_1 = \{(ab)^n | n \geq 0\}$
- $L_2 = \{(ab)^n(ab)^n | n \geq 0\}$
- $L_3 = \{(ab)^n b(ab)^n | n \geq 0\}$
- $L_4 = \{(ab)^n(ba)^n | n \geq 0\}$
- $L_5 = \{((ab)^n)^m | n \geq 0, m \geq 0\}$
- $L_6 = \{a^n ba^m | n \geq m\}$
- $L_7 = \{a^n aa^m | n \geq m\}$
- $L_8 = \{a(ab)^n b | n \geq 0\}$
- $L_9 = \{a^n | n \text{ es un cuadrado perfecto}\}$
- $L_{10} = \{a^n | n \text{ es una potencia de } 2\}$
- $L_{11} = \{a^n | n \text{ es una potencia de } 10\}$
- $L_{12} = \{b(ab)^n ab(ab)^n a | n \geq 1\}$
- $L_{13} = \{a^n b^m c^{n+m} | n, m \geq 0\}$
- $L_{14} = \{a^{n+m} b^n c^m | n, m \geq 0\}$
- $L_{15} = \{(ab)^n a(ba)^n b | n \geq 0\}$
- $L_{16} = \{a^n | n \text{ es el cuadrado de un número primo}\}$

- $L_{17} = \{a^n | n \text{ es el cubo de la suma de dos números primos}\}$
- $L_{18} = \{a^n b^{n+m} c^m | n, m \geq 0\}$
- $L_{19} = \{a^n w a^n | n \geq 0, w \in \Sigma^*\}$
- $L_{20} = \{vwv | v, w \in \Sigma^*\}$

6. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, y siendo PAL el lenguaje de los palíndromos construidos con dicho alfabeto, ¿puede ser regular el lenguaje $\Sigma^* \backslash PAL$? Restricción: Si tu respuesta es afirmativa, no intentes construir una expresión regular que lo caracterice, y si tu respuesta es negativa no utilices el lema del bombeo ni conjuntos infinitos de cadenas distinguibles para demostrarla.

7. ¿Cuántos lenguajes L cumplen que L^* sea un lenguaje finito? Enumera el conjunto de lenguajes que cumplen la propiedad, y explica porqué no puede haber ninguno más.

8. Siendo $\Sigma = \{a, b\}$, ¿Existen lenguajes infinitos L que cumplan $L^* = L$? En caso afirmativo, muestra al menos 4 ejemplos. ¿Cuántos lenguajes finitos cumplen que $L^* = L$?

9. ¿Existe algún lenguaje que cumpla que $L^+ = L$ pero que no cumpla que $L^* = L$? En caso afirmativo, muestra al menos cuatro ejemplos para el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. ¿Puedes encontrar alguno que sea finito?

10. Siendo $\Sigma = \{0, 1\}$, define una expresión regular para el lenguaje de las cadenas que tienen a lo sumo dos unos seguidos. Define también un AFD para dicho lenguaje.